数理解析研究所講究録 1260 巻 2002 年 105-125

Hilbert 空間の「極座標」と spectral zeta 関数の特殊値

浅田　明 (ASADA Akira)*

665-0022, 宝塚市野上３－６－２１、3-6-21, Nogami, Takarazuka

はじめに

H を Hilbert 空間、$x_1, x_2, \ldots$ をその（適当な正規直行系 $\{e_1, e_2, \ldots\}$ による）座標とする。このとき H の Laplacian $\triangle = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ は距離関数 $r(x) = \|x\|$ にたいしても作用できない。また極座標表示もできない（したがって H の「球面」上には「球面」Laplacian は存在しない)。この難点を克服するため以前　微分作用素の正則化を定義しそれにもとずいて田邊氏と共同で、正則化「球面」Laplacian と周期的境界条件に関する正則化 Laplacian の固有値問題を調べた ([4], [7],[8],　正則化「球面」Laplacian の固有値問題については９９年１月神戸市しあわせの村での「力学系と微分幾何学」研究会で、田邊氏と共に報告した。周期的境界条件についても９９年８月　大阪大学での新開謙三先生追悼「偏微分方程式研究会」等で話している)。

正則化を定義するために H とその上の Schatten class（非退化正値）作用素 G でその ζ-関数 $\zeta(G, s) = trG^s$ の解析接続が原点で正則なものとの組 $\{H, G\}$ を考える。従って、正則化は H だけでは決まらず G に関係する。H が compact 多様体 M 上の Hilbert 空間で、G がその上の非退化自己共役楕円形（擬）微分作用素 D のグリーン関数の場合このような組をかんがえることは、H に M の D に関する spectre 幾何の情報をあたえた非可換幾何を考えることに当たる。$\zeta(G, s)$ の特殊値は $\{H, G\}$ の不変量を与える。たとえば、H の正則化次元 $\nu = \zeta(G, 0)$ や M の次元に当たる $\zeta(G, s)$ の最初の極の位置 d、単位 cube の「体積」に当たる $detG = \exp(\zeta'(G, 0))$ などである。

正則化 Laplacian :$\triangle$: の固有値・固有関数は H の上では有限次元からの類推で得られるものしか現れないが、新しい次元を付け加えると有限次元からの類推では得られない固有値・固有関数が存在する。ここで付け加えられた新しい次元は　「球面」Laplacian の場合は、H に極座標を導入

*Freelance Mathematician, E-mail asada-a@poporo.ne.jp

した場合の「経度」的なもので、それにたいして、周期的境界条件の場合は determinant bundle 的な物であり、見かけ上かなり違っている。また周期的境界条件の固有値として $-\zeta(G,-d)$ が現れ、それは $\{H,G\}$ の不変量と解釈できる。

しかし極座標に関係して現れる新しい次元と、周期的境界条件に関係して現れる新しい次元とは関係があり、その関係は $\mathrm{Res}_{s=d}\zeta(G,s)$ をもちいて、表される。従って、$\mathrm{Res}_{s=d}\zeta(G,s)$ も $\{H,G\}$ の不変量として解釈できる。具体的には、周期的境界条件のため H を拡張した空間は G の固有ベクトル $e_1,e_2,\dots;Ge_n=\mu_n e_n$ を用いて、$x=\sum x_n e_n$ と表され

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n^{-d/2}x_n=t\in\mathbb{R},$$

が存在する x の集合だが、x は H と G から作ったソボレフ空間 $W^{-k},k>0$ に含まれ、そこで極座標表示を持つ。その緯度を $\theta_{1,k},\theta_{2,k},\dots$ とすれば $t\neq 0$ のとき $\lim_{k\to 0}\theta_{n,k}=\pi/2$ となって $k=0$ のところでは極座標（緯度）は意味を失う。しかし $\mathrm{Res}_{s=d}\zeta(G,s)=c\neq 0$ とすれば

$$\theta_{n,k}=\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{c}{2}}\frac{x_n}{|t|}\sqrt{k}+o(\sqrt{k}),$$

という展開があるので、$\theta_{n,k}-\pi/2$ の k についての $\frac{1}{2}$-階微分 ($k=0$ での) を使った

$$\frac{d^{1/2}}{dk^{1/2}}(\theta_{1,k}-\frac{\pi}{2})|_{k=0},\ \frac{d^{1/2}}{dk^{1/2}}(\theta_{2,k}-\frac{\pi}{2})|_{k=0},\dots,$$

が極座標（緯度）の替わりとみなせる。

本稿の目的はこれらの関係を述べることだが、その前に準備として、正則化の定義と、$:\Delta:$ の固有値問題についての結果を述べ、（１節、２節）３節で、極座標に関係して現れる経度的次元と周期的境界条件に関係して現れる determinant bundle 的次元との関係を述べまた上記の緯度についての $\frac{1}{2}$-階微分の式を示す。

1 正則化の定義

正則化を定義するため H とその上の（正定値）Schatten class 作用素 G で $\zeta(G,s)=tr(G^s)$ が $s=0$ まで解析接続されそこで、正則なものの組 $\{H,G\}$ を考える ([2])。

このような組としては $H=L^2(X,E), X$ は　コンパクトリーマン多様体（またはスピン多様体）E はその上のバンドルで、G はそこに働く非退化自

己共役楕円形（擬）微分作用素のグリーン作用素があげられる ([1], [12]. コンパクトでない多様体上の作用素については、[16] 参照, $\zeta(G,s)=tr(G^s)$ で定義しているので、$\zeta(D,s)=\sum\lambda_n^{-s}$ と $\zeta(G,s)$ は一致する)。この場合 $\{H,G\}$ を考えることは X の D に関するスペクトル幾何の情報を H に与えることになる。すぐに得られる不変量としては

1. $\nu=\zeta(G,0)$: H の正則化次元と呼ぶ。
2. $\zeta(G,s)$ の最初の極の位置 d:　X の次元に当たる。
3. $det(G)=\exp(\zeta'(G,0))$: H の「単位」cube の「体積」。

があげられる。ただし $\mathbf{e}=\sum\mu_n^{d/2}\notin H$ だから、集合

$$\{\sum x_n e_n|0\le x_n\le\mu_n^{d/2}\},$$

は H にふくまれない。これをふくむようにするには次節で定義する空間 $H^-(finite)$ まで H を拡張する必要がある。直感的には ν は G の固有値の個数を数えていて、$detG$ は G の固有値全体の積を与える。

$$det(tG)=t^\nu det(G),\quad t\in\mathbb{R}^+,$$

だから、これらの定義は（ある程度)consitent である。

ν は H 上のグラスマン代数やクリフォード代数に無限次の元を添加して結合的にするためには整数で無ければならない。ν は H の次元にあたるので、H 上のグラスマン代数にすべての生成元の積にあたる $d^\infty x$ を添加すれば、その次数は ν となる。一般に $\infty-p$ 一次の形式 ϕ を考えれれば、その次数は $\nu-p$ となる ([2])。このとき ψ を q 一次形式とすれば

$$\psi\wedge\phi=(-1)^{q(\nu-p)}\phi\wedge\psi=(-)^{2q(\nu-p)}\psi\wedge\phi,$$

となるべきだから ν が整数でなければ矛盾が起きる。これは一般的にはのぞめないが、G が微分作用素の D のグリーン作用素のときは D に質量項を付け加えることによって、ν を整数にできる ([3],[9])。

注意 $\{H,G\}$ は Connes の spectral triple$(\mathcal{A},H,D)$ ([10], [11]) とにている (G は D のグリーン作用素)。$\mathcal{A}$ に当たるものは $B(H)$ を H の有界作用素の代数としては、

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}(G)=\{T\in B(H)|[T,G]\in I_d\},$$

を使うのが妥当らしい。ただし I_d は d-Schatten ideal である ($\zeta(G,s)$ は $s=d$ で極をもつから $G\notin I_d$, $G\in I_c$, $c>d$ である）。しかし正則化 Laplacian を扱うには次節で述べるように H を拡張する必要があり、その場合 $\mathcal{A}$ の元を拡張された空間にまで定義域（と値域）が拡大されるもの

に制限する必要が生じる。したがって $\mathcal{A}$ については、定義についてさえ、まだいろいろ問題が残っている。

H の正規直交規底 $\{e_1, e_2, \ldots\}$ は G の固有ベクトル e_n, $Ge_n = \mu_n e_n$, からとる (μ_n は $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots > 0$ の順序でならべる)。また H のソボレフ・ノルムを

$$\|x\|_k = \|G^{-k}x\|, \quad G^{-k}x = \sum \mu_n^{-k}(x, e_n)e_n,$$

((x, y) は H での内積) で定義し、それによるソボレフ空間を W^k とかく。上記の不変量は H だけでなく任意の k についてソボレフ k-空間 W^k 空間いついても同じように定義されるから $\{H, G\}$ の不変量というよりソボレフ空間の塔 $\{W^k, -\infty < k < \infty\}$ と G との組に対する不変量である。

W^k の正規直交規底は $\{e_1^k, e_2^k, \ldots\}$, $e_n^k = \mu_n^k$ になるから、そこでの Laplacian は $\Delta(k) = \sum \mu_n^{2k} \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ となる。正則化 Laplacian : Δ : は解析接続をつかって

$$:\Delta: f = \Delta(s)f|_{s=0},$$

で定義する。一般的には H 上の関数 f に対して、$(G^s f)(x) = f(G^s x)$ とおくとき $\{H, G\}$ 上の微分作用素 D にたいし、その正則化 $:D:$ を

$$:D: f = G^{-s} D G^s f|_{s=0},$$

で定義する。$G^s x = \sum \mu_n^s (x, e_n)e_n$ だから

$$\frac{\partial G^s f}{\partial x_n} = \mu_n^s G^s\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

となって、この定義での Δ の正則化は　先に定義した正則化と一致する。ただし x_n は H の完備正規直交系 $\{e_n\}$ から得られる H の座標である ($x = \sum x_n e_n$)。

一般に $D = \sum A_{i_1, \ldots, i_m} \dfrac{\partial^{i_1 + \cdots + i_m}}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_m^{i_m}}$ であれば

$$:D: f = \sum \mu_1^{i_1 s} \cdots \mu_m^{i_m s} A_{i_1, \ldots, i_m} \frac{\partial^{i_1 + \cdots i_m}}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_m^{i_m}} f|_{s=0},$$

となる。したがって D が有限個の変数の偏微分しかふくまなければ、$:D:$ と D は一致する。

例 $r(x) = \|x\|$ とすれば、$\dfrac{\partial^2 r}{\partial x_n^2} = 1/r - x_n^2/r^3$ だから

$$\Delta(s)r = \frac{\zeta(G, 2s)}{r} - \sum \mu_n^2 \frac{x_n^2}{r^3}, \ \textit{i.e.} \ :\Delta: r = \frac{\nu - 1}{r},$$

である。この例は ν を H の正則化次元と呼ぶことの一つの正当化を与える。

注意 同じ計算で、任意の p について

$$:\triangle: r^p = p(p+\nu-2)r^{p-2},$$

が成り立つ。したがって ν を H の次元と思うと有限次元の場合と同様に

$$:\triangle: r^{2-\nu} = 0,$$

となる。特に ν が偶数でない負の数（奇数も含む）であれば、$r^{2-\nu}$ は C^2-class だが C^∞-class ではないので、$:\triangle:$ は hypoelliptic でもない。

$:\triangle:$ は、かならずしも任意の微分可能関数にたいして定義されない。たとえば $f(x) = \sum x_n^3$ とすれば、$\triangle(s)f = \sum 6\mu_n^{2s}x_n$ だから $x = \sum \mu_n^d e_n$ であれば

$$(\triangle(s)f)(x) = \zeta(G, 2s+d),$$

となって $\lim_{s\to+0}\triangle f$ は x で発散する。この例 f が外微分可能であっても $:\triangle: f$ が　必ずしも定義できない例にもなっている。

注意 本稿では　簡単のため G を正定値としたが、理論的にも応用上からも G が Dirac 作用素のグリーン作用素になる場合がもっとも重要である。この場合 G については、その η 一関数 $\eta(G,s) = \sum \mathrm{sgn}(\mu_n)|\mu_n|^s$ と $\zeta(|G|,s)$ が共に原点で正則になることを仮定する ([1], [12], [16] 参照)。このときは

$$\zeta(G^\pm, s) = \frac{\zeta(|G|,s) \pm \eta(G,s)}{2},$$

とおいて、不変量として $\nu_\pm = \zeta(G^\pm, 0)$, 等が現れる ([3]、[14] 参照)。

補足

ν が負であれば $r^{2-\nu}$ は C^2-class だから $:\triangle:$ の H の上での（原点を含む）真の解である。しかしこの場合 H の正則化体積要素 $:d^\infty x:$ が定義されれば原点の近傍で r について ν-次で発散するべきだから、$r^{2-\nu} : d^\infty x:$ は ν に無関係に 2-次で 0 に近づく。$(\infty - p)$-次微分形式 ([2]) をつかうと $dr \wedge d\omega = r : d^\infty x:$　となる $(\infty-1)$-形式 ω を

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1} d^{\infty-\{i\}}x,\\
d^{\infty-\{i\}}x &= dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots,
\end{aligned}$$

で与えることが出来るが、ω は外微分できない（$d\omega$ は発散する）。しかし W^s の上で同様に作った $\omega(s)$ は H の座標で書くと

$$\omega(s) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\mu_i^s(detG)^{-s}d^{\infty-\{i\}}x,$$

となり

$$d\omega(s)|_{s=0} = \nu : d^{\infty}x :, \quad d(r^{-\nu}\omega(s))|_{s=0} = 0,$$

が成立する。同様に $: d^{\infty}x(s) :$ は $(detG)^{-s} : d^{\infty}x :$ で定義され

$$d\|x\|_s \wedge d\omega(s) =: d^{\infty}x(s) :,$$

となる。したがって $: \triangle :$ にたいする Poisson 核としては $r^{2-\nu} : d^{\infty}x(s) :$ が候補になる。なお $: d^{\infty}x(s) :$ と $: d^{\infty}x :$ とは $(detG)^{-s}$ しか違いがなくて、正則化の意味はないようだが、それは H で考えているからで、曲がった空間の上で考えれば、違いがでる ([2] 参照)。

上記の議論から、一般に $(\infty - p)$-形式 $d^{\infty-I}x$, $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$, $|I| = p$, を

$$dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i_1-1} \wedge dx_{i_1+1} \wedge \ldots dx_{i_p-1} \wedge dx_{i_p+1} \wedge \ldots,$$

とするとき

$$d^{\infty-I}x(s) = \mu_{i_1}^s \ldots \mu_{i_p}^s(detG)^{\nu-p}d^{\infty-I}x,$$

とおき $\Phi = \sum_I f_I d^{\infty-I}x$ にたいし

$$\Phi(s) = \sum_I G^s f_I d^{\infty-I}x(s),$$

と定めて Φ の正則化外微分 $: d :$ を

$$: d : \Phi = d\Phi(s)|_{s=0},$$

で定義することが示唆される。$(\infty - p)$-形式の外微分は、一般に発散し、外微分可能であれば完全形式になる。特に閉形式はいつでも完全形式だから $(\infty - p)$-次形式を使ったド・ラム　コホモロジーは意味がない。また外微分は巾零ではない ($d^2 \neq 0$、一般に任意の n について $d^n \neq 0$) など病的なことが知られている ([2])。これらの現象が正則化外微分をつかったときどうなるかを調べるのは今後の課題である。

注意 有限次形式についても正則化外微分は同様に定義できるが、それは通常の外微分と一致する。

2 諸結果

1. 正則化「球面」Laplacian

H の極座標は $\|x\|=r,\ 0\le\theta_n\le\pi$ として

$$x_1=r\cos\theta_1,\ x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2,\dots,$$
$$x_n=r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n,\dots,$$

で与えられる。ただし $\theta_n=0$ となれば $\theta_m=0,\ m>n$ と約束する。この座標は緯度だけがあって、経度がない。

$$r^2=x_1^2+\cdots+x_n^2+r^2(\sin\theta_1\cdots\sin\theta_n)^2,$$

だから $\theta_1,\theta_2,\dots$ は独立ではなく制約条件

$$\lim_{n\to\infty}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_n=0$$

を満たさなければならない。

注意 $\theta_1,\theta_2,\dots$ が独立であっても極限 $\lim_{n\to\infty}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_n$ は必ず存在する。この極限値を t_∞ とおけば、H に経度を付け加えることは、新しい角 $\phi,\ 0\le\phi<2\pi$ を導入して　変数

$$y=rt_\infty\cos\phi,\quad z=rt_\infty\sin\phi,\quad r\in\mathbb{R}^+,$$

を H に付け加える事にあたる。したがって経度を付け加えた空間は $H\oplus\mathbb{R}^2$ となる。なお [7] で t_∞ を付け加えることを経度と呼んだが、これでは不充分のようである (t_∞ だけを付け加えた空間は $H\oplus\mathbb{R}^+$ になる)。

経度を付け加えた空間の「球面」の Greenwich meridian が H の球面に t_∞ を付け加えた ($\theta_1,\theta_2,\dots$ を独立と見た) 空間と解釈できる。

有限次元の極座標と同様に $r_1=r,\ r_k=\sqrt{\sum_{n\ge k}x_n^2}$ とおくと

$$\sin\theta_k=\frac{r_{k+1}}{r_k},\ \cos\theta_k=\frac{x_k}{r_k},\ r_k^2=r\ 2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{k-1},$$

である。これから

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x_n} &= \frac{x_n}{r},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_n^2}=\frac{1}{r}-\frac{x_n^2}{r^3},\\
\frac{\partial\theta_n}{\partial x_n} &= -\frac{r_{n+1}}{x_n^2},\quad \frac{\partial^2\theta_n}{\partial x_n^2}-\frac{2x_nx_{n+1}}{r^4},\\
\frac{\partial\theta_m}{\partial x_n} &= \frac{x_mx_n}{r_m^2r^{m+1}},\\
\frac{\partial^2\theta_m}{\partial x_n^2} &= \frac{x_m}{r_m^2r_{m+1}}-\frac{2x_mx_n^2}{r_m^4r_{m+1}}-\frac{x_mx_n^2}{r_m^2r_{m+1}^3},\quad n>m,
\end{aligned}$$

となり $\dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ は

$$(\frac{\partial r}{\partial x_n^2})^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial x_n^2}\frac{\partial}{\partial r}+\sum_{m\leq n}(\frac{\partial \theta_m}{\partial x_n})^2\frac{\partial^2}{\partial \theta_m^2}+\sum_{m\geq n}\frac{\partial^2\theta_m}{\partial x_n^2}\frac{\partial}{\partial \theta_m},$$

だから正則化しなければ $\triangle$ は極座標表示できない。しかし、正則化すれば極座標表示でき、それは正則化次元だけによっている。それを : $\triangle := \triangle[\nu]$ とすれば

$$\triangle[\nu]=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\nu-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Lambda[\nu]$$

となり、正則化球面 Laplacian $\Lambda[\nu]$ は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1}}(\frac{\partial^2}{\partial\theta_n^2}+(\nu-n-1)\frac{\cos\theta_n}{\sin\theta_n}\frac{\partial}{\partial\theta_n}),$$

となる。この形は緯度変数を独立と思っても意味があるから、「球面」を緯度変数が独立であるとして拡張する。これは ([7] で経度と呼んだ) 新しい変数

$$t_\infty=\lim_{n\to\infty}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_n, \tag{1}$$

を球面に付け加えることに当たる。ただし先に注意したように t_∞ だけを経度と呼ぶのは少し無理があるようである。

$\Lambda[\nu]$ の固有関数が $\Theta(\theta_1,\theta_2,\dots)=\prod T_n(\theta_n)$ と変数分離されていれば、T_n は常微分方程式

$$\sin^{-\nu+n+1}\theta_n\frac{d}{d\theta_n}(\sin^{\nu+n-1}\theta_n\frac{dT_n}{d\theta_n})+(a_{n-1}-\frac{a_n^2}{\sin^2\theta_n})T_n=0, \tag{2}$$

を満たす ([7])。ただし $\Lambda[\nu]\Theta+a_0\Theta=0$ とする。

T_n は $\theta_n=0,\pi$ で連続でなければならないので、ν が整数であると仮定すれば、a_n は整数列 l_n, $l_0\geq l_1\geq\dots\geq 0$ によって、

$$a_n=l_n(l_n+\nu-n-2), \tag{3}$$

と表される。特に $l_0=l$ として

$$-a_0=-l(l+\nu-2),\quad l\in\mathbb{N},$$

が $\Lambda[\nu]$ の固有値になる。有限次元の場合と違って、ν によっては $0<l<2-\nu$ となる整数 l が存在することがあり、そのときは $\Lambda[\nu]$ は定値作用素ではない。

もし $l_{n-1} \neq l_n$ であれば、（１）の解は $\omega_n = \cos\theta_n$ の Gegenbauer 多項式 C_l^λ,

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^\lambda} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l^\lambda(x)t^l,$$

を用いて $T_n(\omega_n) = (1-\omega_n^2)^s f_n(\omega_n)$, $s = -\frac{l_n+\nu-n-2}{2}$, *or* $\frac{l_n}{2}$,

$$\begin{aligned} f_n(\omega_n) &= AC_{l_n-1-l_{n-1}}^{-l_n+(N+3-\nu)/2}(\omega_n) + BC_{l_n-3l_{n-1}-1}^{-l_n+(n+3-\nu)/2}(\omega_n), \\ & s = -\frac{l_n+\nu-n-2}{2}, \\ f_n(\omega_n) &= AC_{l_{n-1}-l_n}^{l_n+(\nu-n-1)/2}(\omega_n) + BC_{n+1-l_{n-1}-l_n-\nu}^{l_n+(\nu-n-1)/2}(\omega_n),\ s = \frac{l_n}{2}, \end{aligned}$$

で与えられる。従って有限次元 Laplacian と類似している。ただし、$l_n + (\nu-n-1)/2$ は n が大きくなると負になり通常使われない（有限次元球面 Laplacian の固有関数としては現れない）負の次数の Gegenbauer 多項式が表れる ([15] 参照)。

しかし n はいくらでも大きくなるから、ほとんどすべての n について $l_{n-1} = l_n$ であり、この場合 $T_n(\theta_n) = \sin^{l_n}\theta_n \cdot S_n(\theta_n)$ とおけば、（１）は

$$\frac{d^2S_n}{d\theta_n^2} + (2l_n+\nu-n-1)\frac{\cos\theta_n}{\sin\theta_n}\frac{dS_n}{d\theta_n} = 0,$$

となる。この方程式の解は

$$T_n(\theta_n) = \sin^{l_n}\theta_n(b_n + c_n\int_0^{\theta_n}\sin^{n+1-\nu-2l_n}x dx),$$

で与えられる。有限次元では $n+1 < \nu$ だから T_n が連続になるには $c_n = 0$ でなければならないが、無限次元ではほとんどすべての n について $n+1-\nu-2l_n \geq 0$ となるから $c_n \neq 0$ となる T_n の無限積で表される固有関数がある。詳しくは

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n+1-\nu-2l_n}dx = B(\frac{n+1-\nu}{2} - l_n, \frac{1}{2}) = O(\frac{1}{\sqrt{n}}),$$

だから $b_n = 1$, $\sum|c_n|/\sqrt{n} < \infty$ であるか $b_n = 0$, $\prod 2c_nB(\frac{n+1-\nu}{2} - l_n, \frac{1}{2})$ が収束していれば、無限積

$$\prod(b_n + c_n\int_0^{\theta_n}(\sin x)^{n+1-\nu-2l_n}dx),$$

は収束する。したがって

$$\begin{aligned}&\Theta(\theta_1,\theta_2,\dots)\\ = \ & F(\theta_1,\dots,\theta_{N-1}\prod_{n\geq N}(\sin\theta_n)^{l_\infty}(b_n+c_n\int_0^{\theta_n}(\sin x)^{n+1-\nu-2l_\infty}dx),\end{aligned}$$

の形の固有関数がある。この形の固有関数は有限次元の類似をもたない。しかしこの固有関数は $\sin\theta_n$ の無限積を因子として含むから、$t_\infty=0$ のところでは 0 となる。

なおこの形の無限積であらわされる固有関数は ν が整数でなくても意味がある。したがって、$t_\infty\neq 0$ のところでは $\Lambda[\nu]$ は l を自然数としたとき $-l(l+\nu-2)$ (非整数) を固有値として持つ。

注意 $l_n=l_{n+1}=\cdots=l_\infty$ の場合の結果は ν が整数でなくても成り立つ。

これらの計算は田邊氏による ([7])。

補足

$$\triangle[\nu] = \triangle[\mu]+\frac{\nu-\mu}{r}K, \tag{4}$$

$$K = \frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\theta_n}{\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1}\sin\theta_n}\frac{\partial}{\partial\theta_n}, \tag{5}$$

だから　$\triangle[\nu]f$ が正則化に無関係 (ν に無関係) になるための必要十分条件は $Kf=0$ である。

K は 1 階線形偏微分方程式だから $Kf=0$ の解は K の特性曲線に沿って定数である。K の特性方程式

$$\frac{dr}{dt}=1,\ \frac{d\theta_n}{dt}=\frac{\cos\theta_n}{r\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1}\sin\theta_n},\ n\geq 1,$$

の解は $r=t+c,$

$$\cos\theta_1=\frac{c_1}{t+c},\ \cos\theta_n=\frac{c_n}{\sqrt{(t+c)^2-(\sum_{k=1}^{n-1}c_k^2)}},\ n\geq 2,$$

で与えられるから、$\sin\theta_n=\sqrt{\dfrac{(t+c)^2-(\sum_{k=1}^{n}c_k^2)}{(t+c)^2-(\sum_{k=1}^{n-1}c_k^2)}}$ となって、$x_\infty=rt_\infty$ とおけば

$$x_n=c_n,\ n\geq 1,\ x_\infty=\sqrt{(t+\|x\|)^2-\|x\|^2},\ t\geq 0,$$

となる。従って $H\oplus\mathbb{R}^+=\{(x,x_\infty)|x\in H, x_\infty\in\mathbb{R}^+\}$ で K の $x\in H$ から出発する特性曲線は

$$x(t)=x,\ x\in H,\ x_\infty=\sqrt{(t+\|x\|)^2-\|x\|^2},\ t\geq 0. \tag{6}$$

である。よって H に $x_\infty=rt_\infty$ を付け加えた空間

$$H\oplus\mathbb{R}^+$$

の（開集合）上の関数 f が $Kf=0$ となるためには f が x_∞ に無関係であることが必要十分である。

2. 周期的境界条件

正則化 Laplacian にたいして適切な周期的境界条件として

$$f|_{x_n=-\mu_n^{d/2}}=f|_{x_n=\mu_n^{d/2}},\quad \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{x_n=-\mu_n^{d/2}}=\frac{\partial f}{\partial x_n}|_{x_n=\mu_n^{d/2}}, \tag{7}$$

を考える。この境界条件での端点に当たる $\mathbf{e}=\sum\mu_n^{d/2}e_n$ は H に入っていないので、この境界条件を扱うには H は不適切で、空間

$$H^-(finite)=\{\sum x_ne_n|\lim\mu_n^{-d/2}x_n\ exists\}, \tag{8}$$

が適切である ([4],[8])。$H^-(finite)$ は集合として

$$H^-=\cap_{l<0}W^l$$

にふくまれる。位相空間としては H^- はソボレフ空間列 $W^l;l<0$ の射影極限と考える。また

$$\begin{aligned} H^-(finite) &= H^-(0)\oplus\mathbb{R}\mathbf{e}, &(9)\\ H^-(0) &= \{\sum x_ne_n|\lim\mu_n^{-d/2}x_n=0\}, &(10)\end{aligned}$$

であり、$H^-(0)$ は H に近い空間である。しかし多少人工的だが H が $e_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx,\ n=1,2,\ldots$ を規底とするとき ($\mu_n=\frac{1}{n^2},\ d=\frac{1}{2}$)

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{\sqrt{n\log n}}\in H^-(0),\quad\notin H,\qquad \sum\frac{1}{n}e_{n^2}\in H,\quad\notin H^-(0)$$

だから、一般には H と $H^-(0)$ との間に包含関係はない。

$H^-(finite)$ の位相は H^- の部分空間としての位相ではなく $H^-(0)$（位相は H^- の部分空間としての位相）と $\mathbb{R}$ との積空間としての位相をいれる。この時 $\mathbb{R}\mathbf{e}$ は determinant bundle と解釈出来る ([4], [8])。

境界条件 (7) から決まる $H^-(finite)$ と $H^-(0)$ の中の格子 $\overline{\mathbb{Z}^\infty}$, $\mathbb{Z}^\infty$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{Z}^\infty} &= \{\sum 2m_n\mu_n^{d/2}e_n | m_n \in \mathbb{Z},\ m_n = m_\infty, \quad for\ n\ is\ large.\},\\ \mathbb{Z}^\infty &= \{\sum 2m_n\mu_n^{d/2}e_n | m_n \in \mathbb{Z},\ m_n = 0, \quad for\ n\ is\ large.\}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\overline{\mathbb{Z}^\infty} = \mathbb{Z}^\infty \oplus \mathbb{Z},$$

である。また (7) から H の中で生成される格子も $\mathbb{Z}^\infty$ である。

$:\triangle:$ の境界条件 (7) に関する固有関数が、$\prod f_n(x_n)$ と変数分離されているとすれば f_n は常微分作用素 $\mu_n^{2s}\dfrac{d^2}{dx_n^2}$ の境界条件

$$f_n(-\mu_n^{d/2}) = f_n(\mu_n^{d/2}), \quad \frac{df_n}{dx_n}(-\mu_n^{d/2}) = \frac{df_n}{dx_n}(\mu_n^{d/2}),$$

に関する固有関数を $s=0$ まで解析接続したものになっている。従って

$$f_n = A\cos(m_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n) + B\cos(m_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n),\ m_n \in \mathbb{Z},$$

となるが、$\sum m_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n e_n \in H^-(finite)$ が任意の $\sum x_n e_n \in H^-(finite)$ にたいし成立しなければならないから、整数列 $\{m_1, m_2, \dots\}$ はある番号から先一致しなければならない。

$$m_n = m_{n+1} = \cdots = m_\infty, \tag{11}$$

とおけば (11) から $\prod f_n(x_n)$ が収束すれば

$$\triangle(s)f = -(m_\infty^2\zeta(G,-d) + \sum(m_n^2 - m_\infty^2)\mu_n^{2s-d})f$$

となる。よって、$\zeta(G,s)$ が $s=-d$ まで解析接続され、そこで正則であれば（この仮定は G がコンパクト多様体上の楕円形（擬）微分作用素のグリーン作用素の場合は成り立つ)、

$$:\triangle: f = -(m_\infty^2\zeta(G,-d) + \sum(m_n^2 - m_\infty^2)\mu_n^{-d})f, \tag{12}$$

である。ただし $\sum(m_n^2 - m_\infty^2)\mu_n^{-d}$ は有限和である。

ここで $m_\infty = 0$ であれば、f は有限次元 Laplacian の固有関数（から来たもの）であり、その固有値 $-\sum m_n^2\mu_n^{-d}$（有限和）も有限次元 Laplacian の固有値だが、$m_\infty \neq 0$ であれば、固有値 $-m_\infty^2\zeta(G,-d)$ は有限次元では類似物を持たない。しかしこの場合 f は真に無限積となるので、$H^-(0)$ の

上では　f_n の有限個を除いてすべてが $\cos(m_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n)$ となる場合をのぞいて、恒等的に 0 となる。従って、: △ : が境界条件 (7) のもとで、正則化によって、はじめて現れる固有値・固有関数の状態は、新しい次元 $\mathbb{R}\mathbf{e}$ を付け加えることに大きく影響される。

注意 $f_n(x_n)=\sin(m_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n)$ または $f_n(x_n)=\cos(m_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n)$ で $x=\sum x_n e_n\in H^-(finite)$ のとき $\prod f_n(x_n)\neq 0$ であれば f_n は有限個をのぞいてすべて $\sin(m_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n)$ または $\cos(m_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n)$ である。

ここで得られた : △ : の境界条件 (7) に関する固有値全体の集合は $\overline{\mathbb{Z}^\infty}$ の元を $(m_1,m_2,\dots,m_\infty)$ とかくことにすると

$$\overline{\mathbb{Z}^\infty}^+=\{(m_1,m_2,\dots,m_\infty)|m_1\geq 0,m_2\geq 0,\dots,m_\infty\geq 0\},$$

と見ることができる。それにたいして固有関数は、$m_n\in\mathbb{Z}$, $m_n>0$ のとき $\sin(m_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n)$ を、$m_n\in\mathbb{Z}$, $m_n\leq 0$ のとき $\cos(m_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n)$ を対応させ、また $m_\infty>0$ のときは $\prod\sin(m_\infty\mu_n^{-d/2}\pi x_n)$ を、$m_\infty\leq 0$ のときは $\prod\cos(m_\infty\mu_n^{-d/2}\pi x_n)$ を対応させる（ただし無限積は、$\overline{\mathbb{Z}^\infty}$ の元 $(m_1,m_2,\dots,\dots,m_\infty)$ が $m_N\neq 0$、かつ $m_n=0$, $n>N$ のとき N から先の項について取る）ことにより $\overline{\mathbb{Z}^\infty}$ の元と 1 対 1 対応する。

注意 この結果は ν が整数でなくても成り立つ。

固有関数の直交性については、$f(x)=\prod f_n(x_n)$ を

$$f_n(x_n)=\sin(m_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n),\quad or\quad \cos(m_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n)$$

として、m_n は有限個 (N とする）以外は 0(case (i)) または有限個だけ 0(case (ii)) であるとし、

$$\int_{-\mu_1^{d/2}}^{\mu_n^{d/2}}\int_{-\mu_2^{d/2}}^{\mu_2^{d/2}}\cdots|f(x)|^2d^\infty x=2^{\nu-N}(detG)^{d/2},\quad case\ (i),$$
$$\int_{-\mu_1^{d/2}}^{\mu_n^{d/2}}\int_{-\mu_2^{d/2}}^{\mu_2^{d/2}}\cdots|f(x)|^2d^\infty x=2^{N}(detG)^{d/2},\quad case\ (ii),$$

と定義する (無限次元での積分だから、この定義を正当化するにはなんらかの正則化の操作が必要になる。[5],[6] 参照)。このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x)&=2^{-(\nu-N)/2}(detG)^{-d/4}f(x),\quad case\ (i),\\ \mathrm{f}(x)&=2^{-N/2}(detG)^{-d/4}f(x),\quad case\ (ii),\end{aligned}$$

とおけば $\mathrm{f}(x)$ は正規直交系を作るから、これで張られる Hilbert 空間を考えるとそこでは上で作った固有値、固有関数が : △ : の境界条件（７）に

ついての固有値・固有関数を尽くしている。特に有限個の変数だけの関数（有限次元からきた関数）は (ii) の型の関数だけで展開されるから、真に無限個の変数の関数を扱うには (ii) の型の関数が必要である（$\mathbb{R}\mathbf{e}$ が必要になる)。

注意 形式的には $\zeta(G,s)$ の特殊値が：Δ：の固有値となる境界条件としては、(7) 以外に

$$f|_{x_n=-\mu_n^{k/2}} = f|_{x_n=\mu_n^{k/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{x_n=-\mu_n^{k/2}} = \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{x_n=\mu_n^{k/2}},$$

が考えられる。しかし $k \neq d$ だと、この境界条件の基本領域

$$Q(k) = \{\sum x_n e_n | |x_n| \leq \mu_n^{k/2}\},$$

は $H^-(finite)$ に含まれないか ($k < d$)、開集合を含まないか ($k > d$) のいずれかになり、意味のある条件ではない。また H から出発せず、W^k から出発して（方程式として Δ ではなく $\Delta(k/2)$ を使って）同様な計算を行っても、有限次元の類推では得られない新しい固有値としては $-\zeta(G,-d)$ が現れる。この意味で、$\zeta(G,-d)$ も $\{H,G\}$ の不変量である。また境界条件として

$$f|_{x_n=0} = f|_{x_n=\mu_n^{d/2}} = 0,$$

の形のものをとっても、同様の固有値・固有関数が出てくる（ただし、この場合は固有関数として必ず sin の無限積がでるから、固有値は有限次元からくるものは（0 以外には）無い。そして必ず $\zeta(G,-d)$ の項を含む ($m_\infty \neq 0$ である)。したがって、この境界条件が意味をもつ（0 以外の固有値・固有関数を持つ）ためには $\mathbb{R}\mathbf{e}$ を付け加えることが必要である。

補足

H 上の Dirac 作用素 $\not{D}$ についても正則化 Dirac 作用素：$\not{D}$：の周期的境界値問題を考えて固有値・固有関数（スピノル場）を求めることができる ([4])。結果は正則化 Laplacian と同様だが、変数分離した方程式の解はクリフォード代数の生成元を $e_1, e_2, \ldots$ として

$$A\cos(m_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n) + B\sin(m_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n)e_n,$$

の形なので、生成元全部の積（無限スピノル、γ_5) が必要になる。ただし $H^-(finite)$ では無限スピノル（とそれと有限次スピノルの積）以外の形の無限積は考えなくても良い ([4])。

H 上のクリフォード代数はそのままでは無限スピノル（γ_5）をもたないので、それを付け加える必要が（無限積の形の固有関数を考えるとき）

生じる ([2], [4] 参照)。そのようなクリフォード代数は $e_1, e_2, \ldots$ と e_∞ で生成され、基本関係は $e_n e_m + e_m e_n = -2\delta_{n,m}$ と

$$e_\infty e_n = (-1)^{\nu-1} e_n e_\infty, \quad e_\infty^2 = (-1)^{\nu(\nu-1)/2},$$

である。ここで付け加えられた e_∞ は determinant bundle　(の生成元) とも (無限次元の) 体積要素とも解釈できるので、それ自体ある種の正則化によって意味付けられるものである ([5],[6])。

注意 この場合　無限次の元を含むクリフォード代数が必要なので、ν は整数でなければならない。

3　t_∞ と $\mathbb{R}\mathbf{e}$ の関係

1. t_∞ の $\mathbb{R}\mathbf{e}$ の元としての表示

$t_\infty \neq 0$ であれば $\lim_{n\to\infty} \sin\theta_n = 1$ だから、$\lim_{n\to\infty} \theta_n = \pi/2$　となり、 $\lim_{n\to\infty} \cos\theta_n = 1$ である。ただし、$x = \sum x_n e_n \in H$ であれば、$t_\infty = 0$ だから、$x \notin H$　である。

$$\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_n = \frac{x_n}{\|x\| \cos\theta_n},$$

だから、$\theta_n = \pi/2 + c\mu_n^{(d+k)/2} + o(\mu_n^{(d+k)/2})$ であれば、$x \in \quad W^{k'}$, $k' < k$ であり、t_∞ は (H ではなく) $W^k, k > 0$ から出発して $H^-(finite)$ と同様に作った空間 $W^{k-0}(finite)$

$$W^{k-0}(finite) = \{\sum x_n e_{n,k} | \lim \mu_n^{-d/2} x_n \ exists\},$$
$$W^{k-0}(finite) = W^{k-0}(0) \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_k,$$
$$W^{k-0}(0) = \{\sum x_n e_{n,k} | \lim \mu_n^{-d/2} x_n = 0\},$$
$$e_{n,k} = \mu_n^{-k/2} e_n, \quad \mathbf{e}_k = \sum \mu_n^{d/2} e_{n,k},$$

で、$\mathbf{Re}_k$ の元として表される。

注意 この結果は H に経度 (t_∞) を付け加えるほうが determinant bundle ($\mathbb{R}\mathbf{e}$) を付け加えるよりも大きい空間を考えていて、determinant bundle はその 1 部として見えることを示している (より正確には空間として大きくなるのは緯度変数を独立にとるからで、その結果 $H^-(0)$ より大きい空間が t_∞ を付け加えた空間に含まれる)。

$x \in W^{k-0}(finite)$, $k > 0$ であれば、$\|x\|_l < \infty$, $0 \leq l < k$ である。x の W^l での極座標を

$$x_1 = \|x\|_l \cos\theta_{1,l},\ x_2 = \|x\|_l \sin\theta_{1,l}\cos\theta_{2,l}, \ldots,$$
$$x_n = \|x\|_l \sin\theta_{1,l}\cdots\sin\theta_{n-1,l}\cos\theta_{n.l}, \ldots$$

とする。$\|x\|_l = \sqrt{\sum \mu_n^{-2l}|x_n|^2}$ だから

$$\frac{d\|x\|_l}{dl} = \frac{-\sum(\log\mu_n)\mu_n^{-2l}|x_n|^2}{\|x\|_l} \quad (= \|x\|_l'),$$

である。ある $l > 0$ で $x \in W^l$ だから $\sum \log\mu_n |x_n|^2$ は収束する。よって

$$\frac{d\|x\|_l}{dl}|_{l=0} = -\frac{\sum \log\mu_n |x_n|^2}{\|x\|_l} = \|x\|_l'(0), \tag{13}$$

である。次に $\theta_{n,l}' = d\theta_{n,l}/dl$ を計算する。x_n は l に無関係だから

$$0 = \|x\|_l' \cos\theta_{1,l} - \|x\|_l \sin\theta_{1,l}',$$
$$0 = \|x\|_l' \sin\theta_{1,l}\cos\theta_{2,l} + \|x\|_l \cos\theta_{1,l}\theta_{1,l}'\cos\theta_{2,l} -$$
$$-\|x\|_l \sin\theta_{1,l}\sin\theta_{2,l}\theta_{2,l}',$$
$$,\ldots\ldots,$$

である。また

$$1 + \frac{\cos^2\theta_1}{\sin^2\theta_1} + \cdots + \frac{\cos^2\theta_n}{\sin^2\theta_n}\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_n$$
$$= \frac{1}{\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_n},$$

だから

$$\theta_{n,l}' = \frac{\|x\|_l'}{\|x\|_l}\frac{\cot\theta_{n,l}}{\sin^2\theta_{1,l}\cdots\sin^2\theta_{n-1,l}}, \tag{14}$$

である。$\lim_{l\to 0}\theta_{n,l} = \theta_n$ だから (14) により

$$\lim_{l\to 0}\theta_{n,l}' = \frac{\|x\|_l'(0)}{\|x\|}\frac{\cot\theta_n}{\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1}}, \tag{15}$$

となる。$x \in W^l$, $l > 0$ であれば $\sum \log\mu_n |x_n|^2$ は有限で、この値を $\langle \log G, \|x\|^2 \rangle$ とかけば

$$\lim_{l\to 0}\theta_{n.l}' = -\langle \log G, \|x\|^2\rangle (\frac{\cos\theta_n}{x_n})^2 \cot\theta_n, \tag{16}$$

となる。$l>0$ は任意だから $H^+=\cup_{l>0}W^l$ とおけば (15) は $x\in H^+$ であれば成立する。ただし位相空間としては W^+ はソボレフ空間列 $W^l; l>0$ の帰納極限と考える。

注意 H^+ は $H^-=\cap_{l<0}W^l$ の双対空間である。H^- は $H^-(finite)$ を(集合として)含む空間だから、正則化 Laplacian の周期的境界値問題と関係する。それに対して、上の計算は正則化「球面」Laplacian と H^+ が関係していることを示唆している。

2. **$\mathbb{R}\mathbf{e}$ の元の t_∞ としての表示**

$x=\sum x_n e_n\in H^-(finite)$ であれば (9) から

$$x=y+t\mathbf{e},\ t\in\mathbb{R},\ y=\sum y_n e_n\in H^-(0),$$

と書ける。$t=0(x=y)$ であれば、任意の $\epsilon>0$ にたいし、$\mu_n^{-d}|x_n|^2<\epsilon/2|c|,\ n>N$ となる番号 N がある。ただし $c=\mathrm{Res}_{s=d}\zeta(G,s)$ で、$c\neq 0$ とする。

$$\lim_{k\to 0}k(\sum_{n=1}^{N}\mu_n^{d+k}|x_n|^2)=0,$$

だから　$k<\delta_1$ なら $|k(\sum_{n=1}^{N}\mu_n^{d+k}|x_n|^2)|\le\epsilon$ となる δ_1 を選ぶことができる。他方

$$\lim_{k\to+0}k(\sum_{n>N}\mu_n^{d+k})=\lim_{k\to+0}k\zeta(G,k+d)=c,$$

だから $k\le\delta_2$ なら $|k(\sum_{n>N}\mu_n^{d+k})|<2|c|$ となる δ_2 を選ぶことができる。そこで $\delta=min(\delta_1,\delta_2)$ とすれば $k<\delta$ のとき

$$\begin{aligned}
k\|x\|_{-k}^2 &= \frac{1}{2}2k(\sum\mu_n^{d+2k}|\mu_n^{-d/2}x_n|^2)\\
&< \frac{1}{2}(2k(\sum_{n=1}^{N}\mu_n^{d+2k}|x_n|^2+2k\zeta(G,d+2k)\frac{\epsilon}{2|c|})\\
&< \frac{1}{2}(\frac{\epsilon}{2}+2(c+O(k))(\frac{\epsilon}{2c}))<\epsilon,
\end{aligned}$$

だから $t=0$ のとき

$$\lim_{K\to+0}k\|x\|_{-k}=0, \tag{17}$$

である。(17) と $\lim_{n\to\infty}\mu_n^{-d/2}x_ny_n=0$ から

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+0}k\|x\|_{-k}^2 &= \lim_{k\to+0}k|t|^2\|\mathbf{e}\|_{-k}^2\\
&= \lim_{k\to+0}k|t|^2|\zeta(G,d+2k)|=\frac{1}{2}|t|^2|c|,
\end{aligned}$$

となって

$$\lim_{k\to+0}\sqrt{k}\|x\|_{-k}=\sqrt{\frac{|c|}{2}}|t|, \tag{18}$$

が成立する。

注意 $\mu_1\geq\mu_2\geq\ldots>0$ を仮定しているので、$s>d$ では $\zeta(G,s)>0$ である。また

$$\mathrm{Res}_{s=d}\zeta(G,s)=\lim_{s\to d+0}(s-d)\zeta(G,s),$$

だから $c\geq 0$ となる。したがって (18) を

$$\lim_{k\to+0}\sqrt{k}\|x\|_{-k}=\sqrt{\frac{c}{2}}|t|,$$

と書いても良い。

$x\in H^{-}(finite)$ が $W^{-k},k>0$ の元であるときその W^{-k} での極座標を

$$\begin{aligned} x_1 &= \|x\|_k\cos\theta_{1,k}, \quad x_2=\|x\|_{-k}\sin\theta_{1,k}\cos\theta_{2,k},\ldots, \\ x_n &= \|x\|_{-k}\sin\theta_{1,k}\cdots\sin\theta_{n-1,k}\cos\theta_{n,k},\ldots, \end{aligned}$$

とすれば、$x\in H$ の時、$\lim_{k\to+0}\theta_{n,k}=\theta_n$ である。$x\notin H$ であれば、(18) から $\|x\|_{-k}=O(k^{-1/2})$ となる。従って、$\lim_{k\to 0}\theta_{n,k}=\pi/2$ であり, さらに

$$\begin{aligned} \theta_{n,k} &= \frac{\pi}{2}-\sqrt{k}\alpha_n+o(\sqrt{k}), \qquad (19) \\ x_1 &= \sqrt{\frac{|c|}{2}}|t|\alpha_1,\cdots,x_n=\sqrt{\frac{|c|}{2}}|t|\alpha_n,\cdots, \qquad (20) \end{aligned}$$

となる。よって $t\neq 0$ であれば

$$\theta_{n,k}=\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{|c|k}{2}}\frac{x_n}{|t|}+o(\sqrt{k}), \tag{21}$$

となる。($x\in H^{-}(0)$ であれば $\theta_{n,l}$ の展開はできない)。これから

$$\frac{x_n}{\|x\|_{-k}\cos\theta_{n,k}}=\frac{x_n}{\sqrt{\frac{|c|}{2k}|t|)}\sin(\sqrt{k}\alpha_n)+O(1)},$$

となるから、

$$\lim_{k\to+}\frac{x_n}{\|x\|_{-k}\cos\theta_{n,k}}=\frac{2}{|c|}, \tag{22}$$

となる。$t_\infty = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\|x\|\cos\theta_n}$ だから $t \neq 0$ であれば、$t_\infty \neq 0$ となる。また $\lim_{k\to+0} k^{-1/2}\|x\|_{-k} t_\infty$ は

$$\lim_{k\to+0} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{x_n}{\cos\theta_{n,k}} = \sqrt{\frac{2}{|c|}}|t|, \tag{23}$$

となる。

注意 (21) から $\theta_{n,k} - \pi/2$ は $k=0$ で $C^{1/2}$-class で $t \neq 0$ のとき

$$x_n = -\sqrt{\frac{2c}{\pi}}|t| \frac{d^{1/2}}{dk^{1/2}}(\theta_{n,k} - \frac{\pi}{2})|_{k=0}, \tag{24}$$

が成り立つ。$t \neq 0$ であれば $\lim_{k\to 0}\theta_{n,k} = \pi/2$ となって $x = y + t\mathbf{e}$ にたいする極座標は意味をもたないが、(24) は

$$\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}}(\theta_{n,k} - \pi/2)|_{k=0}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

が極座標（緯度）に替わるものであることを示している。

注意 (18), (19) も $H^-(finite)$ の中では「緯度」変数が完全に独立ではないことを示している。

まとめと補足的な注意

3節の結果から、$\zeta(G,s)$ の最初の留数と $\zeta(G,-d)$ も $\{H,G\}$ の不変量と考えられる（G が D のグリーン作用素の時は $\zeta(G,-d)$ は D のトレース（的）な数である）。また $\theta_{n,l} - \pi/2$ は l の関数として $l=0$ で $1/2$ 階微分可能である ([5], [6]　参照)。非可換幾何的な興味からは $\zeta(G,s)$ から $\{H,G\}$ の不変量がほかに得られるか（例えば2番目以後の留数や $\zeta''(G,0)$ 等を使って）が問題だが、今のところ解かっていない。

Connes の spectral triple $(\mathcal{A}, H, D)$ では D^{-1} が計量にあたるものと解釈され　実際計量が与えられている。　また $\zeta_b(s) = Tr(b|D|^{-s})$ を用いて、$\mathcal{A}, [D,\mathcal{A}]$ と $|D|^z, z \in \mathbb{C}$ で生成された代数の元 P の正則化トレースを $\mathrm{Res}_{z=0} Tr(P|D|^z)$ で定義し、それを用いて、cyclic cocycle などを構成している ([10], [11])。しかし $\mathcal{A}$ と H は固定されていて、$\zeta(D,s)$ の特殊値に特別の意味を求めることはしていないようである。

それに対して、本稿では ζ-正則化を用いることにより、従来　主に確率解析的な扱いをされてきた H 上の微分作用素に対し ([13] など) 古典解析的な扱いが可能であることを示すと共に, その場合組 $\{H,G\}$ で、H を固定する事は適切でなく、また新たな次元を導入する必要があることを示した。ここで導入された新しい次元は determinant bundle (H の体積要

素) と解釈されるが ([5], [6] 参照)、特に正則化「球面」Laplacian に関連して現れる新しい次元は H の極座標には現れない「経度」と関係していて、それと determinant bundle との間は $\zeta(G,s)$ の最初の留数によって関係付けられる。したがって ζ-正則化は従来の手法以外に新しい観点を非可換幾何に与えると言っても良いだろう。

また [2] で示したように非可換幾何的手法は、写像空間など無限次元多様体の大域解析的研究に有効である。その際、無限次元ではじめて現れる $(\infty - p)$-次微分形式の取り扱いは興味ある問題だが、その外微分は多くの場合発散するので　1節　補足で述べたように正則化することが必要になる。この正則化は $\zeta(G,s)$ $(\zeta(D,s))$ を用いて、定義されるので、その意味でも ζ-正則化は非可換幾何で有効な研究手法である。

なお本稿では簡単のため G は正値作用素としたが、Dirac 作用素のグリーン作用素の場合の様に正固有空間 H_+、負固有空間 H_- が共に無限次元となる場合はより重要である。この場合正則化によって付け加えられる空間は $\mathbb{R}\mathbf{e}_+ \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_-$ と書け（2-次元）で、H_+ と H_- の間の等距離作用素 $\mathcal{F}$ を固定すれば、$\mathbb{R}\mathbf{e}_+ \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_-$ に複素構造が入る。これらの研究は今後の課題である。

参考文献

[1] Atiyah, M. F., Patodi, V. K., Singer, I. M.: Spectral asymmetry and Riemannian geometry, I, II, III, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **77**(1975), 43-69, **78**(1975), 405-432, **79**(1976), 71-99.

[2] Asada, A.: Spectre invriants and geometry of mapping spaces, *Geometric Aspects of Partial Differential Equations*, (Eds. Booss-Bavnbek, B., Wojciechowski, K.) Contemporary Math. **242**(1999), 189-202.

[3] Asada, A.: Remarks on the zeta regularized determinant of differential operators, *Proc. Conf. Moshé Flato 1999, Quantization, Deformations, and Symmetries*, (Eds. Dito, G., Sternheimer, D.) 25-36,Math. Phys. Studies *22* Kluwer, 2000.

[4] Asada, A.: Regularization of differential operators on a Hilbert space and geometric meanings of zeta regularization, *Steps in Differential Geometry*, (Eds. Kozma, L., Nagy, P.T., Tamássy, L.)55-66, Debrecen, 2001.

[5] Asada, A.: Regularized product of infinitely many independent variables on a Hilbert space and regularization of infinite dimensional indefinite integral via fractional calculus, to appear in *Proc. ISMMS 2001*, Kolkata.

[6] Asada, A.: Logarithm of differential forms and regularization of volume form, to appear.

[7] Asada, A., Tanabe, N.: Regularization of the Laplacian of a Hilbert space, to appear. Regularized Hilbert space Laplacian and longitude of Hilbert space, to appear.

[8] Asada, A., Tanabe, N.: Regularization of differential operators of a Hilbert space and meaning of zeta regularization, to appear in *Proc. ISMMS 2000*, Kolkata.

[9] Cognola, G., Elizalde, E., Zerbini, S.: Applications in physics of the multiplicative anomaly formula involving some basic differential operators, *Nucl. Physics* **B** **532**(1998), 407-428.

[10] Connes, A.: Geometry from the spectral point of view, *Lett. Math. Phys.*, **34**(1995), 203-238.

[11] Connes, A., Moscovici, H.: The local index formula in noncommutative geometry, *GAFA, Geom. funct. anal*, **5**(1995), 174-243.

[12] Gilkey, P. B.: The residue of the global η function at the origin, *Adv. in Math.* **40**(1981), 290-307.

[13] Léandre, R. Volvich, I. A.: The stochastic Lévy Laplacian and Yang-Mills equation on manifolds, *Infinite Dim. Anal. Quantum Prob. and Related Topics*, **4**(2001), 161-172.

[14] Scott, S. G., Wojciechowski, K. P.: The ζ-determinant and Quillen determinant for a Dirac operator on a manifold with boundary, *GAFA, Geom. funct. anal.*, **10**(2000), 1202-1236.

[15] Suzuki, A., Schmidt, A. G.M.: Negative-dimensional integration revisited, *J. Phys.*, **A**. Math. Gen., **31**(1998), 8023-8039.

[16] Wojciechowski, K. P.: The ζ-determinant and the additivity of the η-invariant on the smooth, self-adjoint Grassmannian, *Comm. Math. Phys.*, **201**(1999), 423-444.